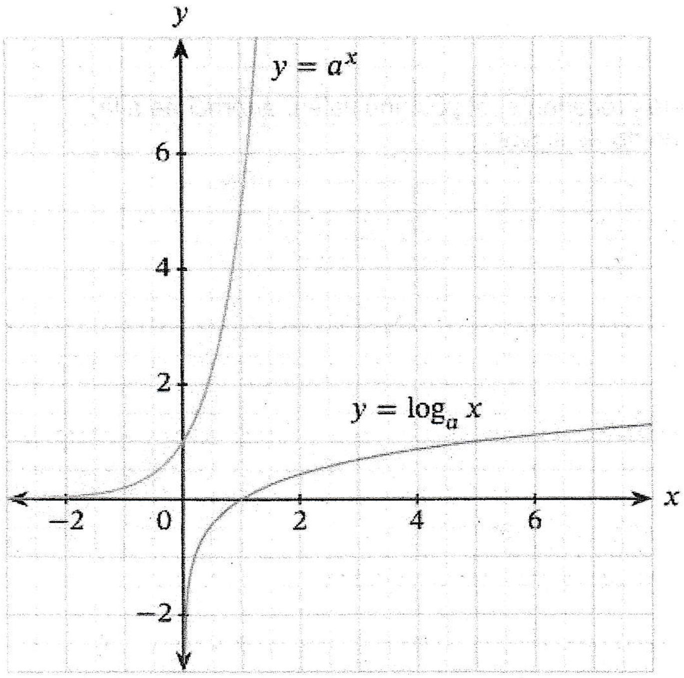
Corrigé

11 Fonction logarithme décimal

1. Définition et premières propriétés

Définition 11.1 On appelle logarithme de base a la **fonction réciproque** ("la marche arrière") de l'exponentielle de base a.



Définition 11.2 En particulier le **logarithme décimal** la **fonction réciproque** ("la marche arrière") de l'exponentielle de base 10. On le note $log(x)$.

Par exemple, $log(10^2) = 2$.

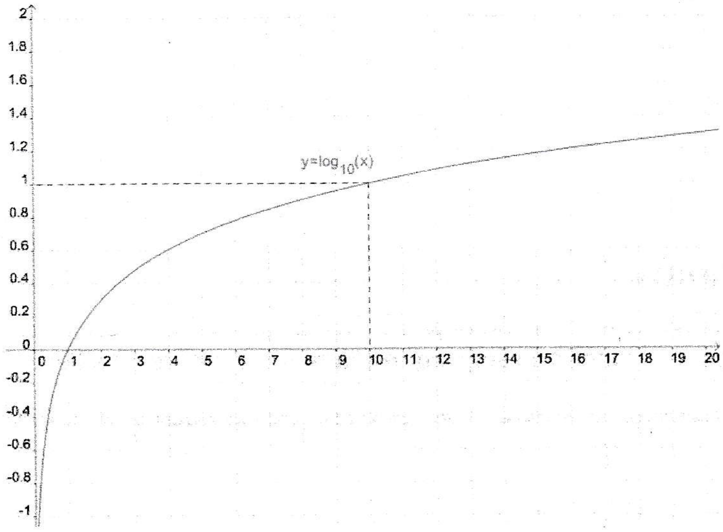
Exercice 11.1 Écrire la valeur des nombres suivants (sans calculatrice, mais écrire d'abord le nombre avec des puissances de 10) :

1. $log(10^3) =$ 3
2. $log(10^{-6}) =$ −6
3. $log(10) =$ $log(10^1) = 1$
4. $log(1) =$ $log(10^0) = 0$
5. $log(0,001) =$ $log(10^{-3}) = -3$
6. $log(10000) =$ $log(10^4) = 4$
7. $log(0,01) =$ $log(10^{-2}) = -2$
8. $log(0,0001) =$ $log(10^{-4}) = -4$

Propriété 11.1 La fonction logarithme décimal est strictement croissante ; donc

$$a < b \Rightarrow log(a) < log(b)$$

Les images sont dans le même ordre que les antécédents.



Exercice 11.2 En utilisant exclusivement la propriété précédente, et pas une valeur approchée à la calculatrice, dire lequel est le plus grand des deux nombres suivants :

1. $log(\pi)$ et $log(3,14)$
   $\pi > 3,14$ donc $\log(\pi) > \log(3,14)$
2. $log(\sqrt{2})$ et $log(\sqrt{3})$
   $2 < 3$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\log(\sqrt{2}) < \log(\sqrt{3})$
3. $log(3 \times 10^{-3})$ et $log(3 \times 10^{-4})$
   $3.10^{-4} < 3.10^{-3}$ donc $\log(3.10^{-4}) < \log(3.10^{-3})$
4. $log(1,4142)$ et $log(1,4143)$
   $1,4142 < 1,4143$ donc $\log(1,4142) < \log(1,4143)$
5. $log(2,56 \times 10^{-2})$ et $log(256 \times 10^{-2})$
   $2,56.10^{-2} < 256.10^{-2}$ donc $\log(2,56.10^{-2}) < \log(256.10^{-2})$

2. Propriétés algébriques

Si on regarde l'exponentielle, les propriétés sur les puissances donnent

$$10^{a+b} = 10^a \times 10^b$$

C'est-à-dire que l'exponentielle "transforme + en ×".
En tant que réciproque, le logarithme fait l'inverse, il "transforme × en +".

Propriété 11.2

$$log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

On en déduit les autres propriétés du log :

Propriété 11.3 $log(a^n) = n \times log(a)$
$log(\frac{a}{b}) = log(a) - log(b)$
$log(\frac{1}{a}) = -log(a)$

Exemple d'utilisation :

$log(800) = log(8 \times 10^2) = log(2^3) + log(10^2) = 3 \times log(2) + 2 \times log(10) = 3 \times log(2) + 2 \times 1 = 3 \times log(2) + 2$

Exercice 11.3 En travaillant comme dans l'exemple ci-dessus :

1. Écrire en fonction de $log(2)$:
   (a) $log(8 \times 10^3)$

   $log(8 \times 10^3) = log\,8 + log(10^3) + log(2^3) + log(10^3) = 3log2 + 3log(10^1)$

   $= 3log2 + 3 \times 1 = 3\,log\,2 + 3$

   (b) $log(1600)$

   $log(16 \times 100) = log(2^4 \times 10^2) = log(2^4) \times log(10^2)$

   $= 4\,log(2) \times 2\,log(10^1) = 4\,log(2) + 2 \times 1 = 4\,log(2) + 2$

   (c) $log(0,32)$

   $log(32 \times 10^{-2}) = log(2^5 \times 10^{-2}) = log(2^5) \times log(10^{-2})$

   $= 5\,log\,2 + (-2)\underbrace{log(10)}_{=1} = 5\,log\,2 - 2$

2. Écrire en fonction de $log(3)$:
   (a) $log(27)$

   $log(27) = log(3^3) = 3log(3)$

   (b) $log(0,09)$

   $log(0,09) = log(9 \times 10^{-2}) = log(9) + log(10^{-2}) = log(3^2) + (-2)\underbrace{log(10)}_{=1}$

   $= 2\,log(3) - 2$

   (c) $log(0,0081)$

   $log(0,0081) = log(81 \times 10^{-4}) = log(81) + log(10^{-4}) = log(3^4) - 4\,log(10)$

   $= 4log(3) - 4$

3. Écrire en fonction de $log(a)$:
   (a) $log(a^2 \times a^3)$

   $= log(a^2) + log(a^3) = 2\,log(a) + 3log(a) = 5\,log(a)$

   (b) $log(\frac{a^7}{a^3})$

   $= log(a^7) - log(a^3) = 7\,log(a) - 3\,log(a) = 4\,log(a)$

   (c) $log(\frac{1}{a^3})$

   $= -log(a^3) = -3log(a)$

3. Équations, inéquations

Propriété 11.4 $log(a) = log(b)$ ssi $a = b$

Exemple d'utilisation :
Résoudre l'équation $2^x = 100$.
$2^x = 100$
$\Leftrightarrow log(2^x) = log(10^2)$
$\Leftrightarrow x \times log(2) = 2 \times log(10)$
$\Leftrightarrow x \times log(2) = 2 \times 1 = 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{log(2)}$
Le log sert à "aller chercher x quand x est en exposant".

Exercice 11.4 En s'inspirant de l'exemple, résoudre :

1. $5^x = 10$

$\log(5^x) = \log(10^1)$

$x \log(5) = 1$

$x = \frac{1}{\log(5)}$

2. $2 \times 3^x = 20$

$\frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{20}{2}$

$3^x = 10$

$\log(3^x) = \log(10)$

$x \log(3) = 1$

$x = \frac{1}{\log(3)}$

3. $2000 \times 0,4^x = 3000$

$0,4^x = \frac{3000}{2000}$

$0,4^x = \frac{3}{2}$

$\log(0,4^x) = \log(\frac{3}{2})$

$x \log(0,4) = \log(3/2)$

$x = \frac{\log(3/2)}{\log(0,4)}$

Facultatif : $x = \frac{\log(3) - \log(2)}{\log(4) - 1}$

Propriété 11.5 $log(a) < log(b)$ ssi $a < b$

Exemple d'utilisation :
Résoudre l'inéquation $5^x < 0,0001$.
$5^x < 0,0001$
$\Leftrightarrow 5^x < 10^{-4}$
$\Leftrightarrow log(5^x) < log(10^{-4})$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4 \times log(10)$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4 \times 1$
$\Leftrightarrow x \times log(5) < -4$
$\Leftrightarrow x < \frac{-4}{log(5)}$
(On peut bien diviser des deux côtés par $log(5)$ sans changer de sens car $log(5) > 0$; attention à vérifier cela quand on divise/multiplie de chaque côté)

Exercice 11.5 En s'inspirant de l'exemple, résoudre :

1. $5^x \leqslant 10$

$\log(5^x) \leqslant \log(10)$

$x \log(5) \leqslant 1$

$x \leqslant \dfrac{1}{\log(5)}$

2. $5 \times 3^x \geqslant 25$

$\dfrac{\cancel{5} \times 3^x}{\cancel{5}} \geqslant \dfrac{25}{5}$

$3^x \geqslant 5$

$\log(3^x) \geqslant \log(5)$

$x \log 3 \geqslant \log 5$

$x \geqslant \dfrac{\log 5}{\log 3}$

3. $15 \times 2^x < 8$

$\dfrac{\cancel{15} \times 2^x}{\cancel{15}} < \dfrac{8}{15}$

$2^x < \dfrac{8}{15}$

$\log(2^x) < \log(8/15)$

$x \log(2) < \log(8/15)$

$x < \dfrac{\log(8/15)}{\log(2)}$

4. Problèmes d'application

Exercice 11.6 Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès des médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certains maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc...) sur une période donnée.

On a évalué, début janvier 2020, les cas de grippe. Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur $[0;6]$ par

$$f(t) = 24 \times 1,27^t$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.

1. Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1ère semaine d'observation, en donner la valeur exacte.

$f(1) = 30,48$

2. Résoudre l'inéquation $24 \times 1,27^t > 60,96$

$24 \times 1,27^t > 60,96$

$1,27^t > \dfrac{60,96}{24}$

$1,27^t > 2,54$

$\log(1,27^t) > \log(2,54)$

$t \log(1,27) > \log(2,54)$

$t > \log(2,54) / \log(1,27)$

$t > 3,89$

3. Au bout de combien de semaines le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double de celui observé la 1ère semaine ?

$2 \times 30,48 = 60,96$, donc au bout de 4 semaines.

Exercice 11.7 Un cabinet d'orthophonie fait le bilan de son activité. On s'intéresse au nombre de séance réalisées chaque trimestre par ce cabinet. A partir du 1er trimestre 2019, le nombre de séances d'orthophonie augmente de 3% par trimestre.
On modélise, à l'aide d'une suite géométrique (r_n) le nombre de séances par trimestre.
On donne $r_1 = 598$ au 1er trimestre 2019.

1. Dire pourquoi la raison de la suite géométrique est $q = 1,03$.

Une augmentation de 3% correspond à une multiplication par $(1+\frac{3}{100}) = 1,03$

2. Calculer le nombre de séances réalisées au cours du 1er trimestre 2020.

$r_5 = 598 \times 1,03^4 \simeq 673$

3. Résoudre l'inéquation $598 \times 1,03^{x-1} \geqslant 800$

$1,03^{x-1} \geqslant 1,34$

$(x-1)\log(1,03) \geqslant \log(1,34)$

$x \geqslant \frac{\log(1,34)}{\log(1,03)} + 1$

$x \geqslant 10,66$

4. Les orthophonistes estiment qu'ils devront recruter un nouveau collègue lorsque le nombre de séances par trimestre dépassera 800. Quand devront-ils recruter ?

Au 3e trimestre 2022

Exercice 11.8 En astronomie, la magnitude apparente, notée M, revient à mesurer combien une étoile apparaît brillante vue de la terre.
L'astronome Norman Pogson (1829-1891) a introduit la formule suivante :

$$M = -2,5log(E) + k$$

Où E est l'éclat de l'étoile observée et k une constante indépendante du choix de l'étoile.
L'étoile Véga a une magnitude apparente fixée à $M = 0$ (en fait c'est 0,03 mais on va arrondir à 0 parce que Véga, dans Goldorak, c'est les méchants). On note E_0 l'éclat de Véga.

1. Montrer que $k = 2,5log(E_0)$

$M = -2,5\log E + k$ (*)

Véga : $M = 0$, E_0

$0 = -2,5\log(E_0) + k$, donc $k = 2,5\log(E)$

2. En déduire que pour une autre étoile (dont $M \neq 0$), on a $M = -2,5log(\frac{E}{E_0})$

En remplaçant dans (*) :

$M = -2,5\log(E) + 2,5\log(E_0)$

$= -2,5(\log(E) - \log(E_0))$

$= -2,5\log(\frac{E}{E_0})$

3. Déterminer la magnitude apparente M des astres suivants

   (a) Vénus ($E = 69,18 \times E_0$)

   $\frac{E}{E_0} = 69,18$

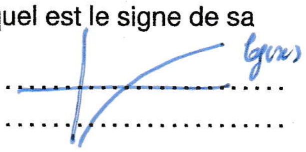
   $M = -2,5 \log(69,18) =$

   (b) Mars ($E = 8,32 \times E_0$)

   (c) Neptune ($E = 6,9 \times 10^{-4} \times E_0$)

4. Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga ($E > E_0$), quel est le signe de sa magnitude apparente ?

   $E > E_0 \Rightarrow \frac{E}{E_0} > 1 \Rightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) > 0$



   $\Rightarrow M = -2,5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right) < 0$